théorème. *Soit* $(b_n)_{n\geq 0}$ *une suite décoissante vers 0. On pose* $\phi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k sin(kt)$. *Alors* ϕ_n *converge localement uniformément sur* $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ *et on a*

$$(nb_n \to 0) \iff (\phi_n\ converge\ uniformement\ sur\ \mathbb{R})$$

Démonstration. *Soit* $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} sin(kt)$ *On a*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} sin(kt) &= \frac{1}{2i}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{itk} + \sum_{k=0}^{n}\overline{e^{itk}}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{it(n+1)}-1}{e^{it}-1} + \overline{\frac{e^{it(n+1)}-1}{e^{it}-1}}\right)\\
&= Im\left(\frac{e^{it(n+1)}-1}{e^{it}-1}\right)\\
&= Im\left(\frac{e^{it(n+1/2)}-e^{-it/2}}{2sin(t/2)}\right)\\
|S_n(t)| &\leq \frac{1}{|sin(t/2)|}
\end{aligned}$$

On écrit une tranche du reste $R_{n,p}$ *pour voir qu'il est de Cauchy en faisant une transformée d'Abel :*

$$R_{n,p}(t) = \sum_{k=n}^{p}(S_k(t)-S_{k-1}(t))b_k = S_{n+p}(t)b_{n+p} - S_{n-1}(t)b_n + \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k(t)(b_k - b_{k+1})$$

Soit $K \subset \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ *un compact. On note* δ *la distance de* K *à* $2\pi\mathbb{Z}$. *Pour tout* $t \in K$ $|S_n(t)b_n| \leq \frac{b_n}{|sin(\delta/2)|}$ *donc on a la majoration*

$$\begin{aligned}
|R_{n,p}(t)| &\leq \frac{b_{n+p}+b_n}{|sin(t/2)|} + \sum_{k=n}^{p-1}|S_k(t)(b_k - b_{k+1})|\\
&\leq \frac{b_{n+p}+b_n}{|sin(\delta/2)|} + \sum_{k=0}^{p-1}\frac{b_k - b_{k+1}}{|sin(\delta/2)|}\\
&\leq \frac{b_{n+p}+b_n}{|sin(\delta/2)|} + \frac{b_n - b_{n+p}}{|sin(\delta/2)|}\\
&\leq \frac{2b_n}{|sin(\delta/2)|}
\end{aligned}$$

donc le reste est uniformément de Cauchy et converge unformément vers 0.. Ainsi $\phi_n(t)$ *converge uniformément sur tout compact de* $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$. *sur* $2\pi\mathbb{Z}$ *la somme est nulle donc converge simplement vers 0, elle converge donc pour tout réel.*

- *supposons que* ϕ_n *converge eunifomément sur* $\mathbb{R}$. *Alors* $v_n(t) := \sum_{k=n+1}^{2n} b_k sin(kt)$ *converge uniformément vers 0. En particulier*

  $$v_n(\frac{\pi}{6n}) = \sum_{k=n+1}^{2n} b_k sin(\frac{\pi k}{6n}) \geq \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{b_{2n}}{2} = \frac{1}{2}nb_{2n}$$

  Ansi $2nb_{2n}$ *converge vers 0, et comme* $b_{2(n+1)} \leq b_{2n+1} \leq b_{2n}$, (nb_n) *converge vers 0*
- *Supposons* $nb_n \to 0$. *Par* $2\pi-$ *périodicité de* ϕ_n, *et même comme* $R_n(2\pi - t) = R_n(t)$ *soit* $t \in]0,\pi]$. *on soient* $n, p \in \mathbb{N}$, *On a*

  $$R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{n+p} b_n sin(kt) + R_{n+p}(t)$$

On majore dans le premier terme $|sin(kt)| \leq kt$. *Dans la première partie on a vuu que la majoration de la tranche ne dépendait pas de* p *d'ou pour tout* $N \in \mathbb{N}$ $|R_N(t)| \leq \frac{2b_N}{|sin(t/2)|}$. *Ainsi* $|R_{n+p}| \leq \frac{2b_{n+p}}{|sin(t/2)|}$. *De plus par concavité de* $sin(t/2)$ *sur* $[0,\pi]$, *on a* $sin(t/2) \geq \frac{t}{\pi}$ *et donc* $\frac{1}{sin(t/2)} \leq \frac{\pi}{t}$ *d'où*

$$|R_n(t)| \leq t \sum_{k=n+1}^{n+p} kb_k + \frac{2b_{n+p}}{|sin(t/2)|} \leq tp \sup_{k\geq n} kb_k + \frac{2\pi b_{n+p}}{t}$$

Soit $\varepsilon > 0$ *il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geq N,\ nb_n \leq \varepsilon$ *pour un tel* n *on a*

$$|R_n(t)| \leq tp\varepsilon + \frac{2\pi(n+p)b_{n+p}}{t(n+p)} \leq tp\varepsilon + \frac{2\pi\varepsilon}{tp}$$

. *Pour* $p = \lfloor 1/t \rfloor + 1$ *on a* $1 \leq pt \leq t+1 \leq \pi + 1$.*Ainsi* $\forall n \geq N,\ \forall t \in]0,\pi], R_n(t) \leq (3\pi+1)\varepsilon$ *qui est aussi vable en 0 ca alors* $R_n(0) = 0$. *finalement* $\forall n \geq N,\ \forall t \in \mathbb{R}, R_n(t) \leq (3\pi+1)\varepsilon$ *ce qui est exactement la convergence uniforme.*

théorème. *Soit* $\frac{1}{C} = \sum_{k\geq 2} \frac{1}{k^2 ln(k)}$ *et* μ *la mesure de pobabilité sur* $\mathbb{Z}$ *donné par* $\mu(0) = \mu(1) = \mu(-1) = 0,\ \mu(n) = \frac{C}{2n^2 ln(|n|)}$. *Soit* ϕ *sa fonction caractéristique, alors* $\phi \in \mathcal{C}^1$ *et* $\mathbb{E}(|\mu|) = \infty$

Démonstration. *on a* $\phi(t) = C\sum_{k=2}^{\infty} \frac{cos(kt)}{k^2 ln(k)}$ *(calcule facile) série convergente bien définie par critère de Riemann.* $\phi_n(t)' = -C\sum_{k=2}^{n} \frac{sin(kt)}{kln(k)}$. ϕ_n' *verifieles hypothèse du théorème précdent donc converge uniformément vers une fonction continue et donc* $\phi \in \mathcal{C}^1$. *Par comparaison série intégrale* ($\int_k^{k+1} \frac{C}{xln(x)}dx \leq \frac{C}{kln(k)}$) *on a* $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{C}{kln(k)} \geq Cln(\frac{ln(n)}{ln(2)}) \to \infty$